



**Ergebnisse im Rahmen der Entwicklung des
Weiterbildungsstudienprogramms „Master Lehramt berufsbildende
Schulen“ und Zweitfächer „Mathematik“ und „Sozialkunde“ im
Vorhaben NOW**

-

**Musterentwurf für die Skriptgestaltung für Studienmodule
im FG Mathematik**

Dieses Vorhaben wird aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung und aus dem Europäischen Sozialfonds der Europäischen Union gefördert.

Autorin:

Nadine Mertz

Erstellt im Rahmen des Vorhabens

NOW – Nachfrage- und adressatenorientierte akademische Weiterbildung an der Universität Erfurt.

Dieses Vorhaben wird aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung und aus dem Europäischen Sozialfonds der Europäischen Union gefördert.

Der Europäische Sozialfonds ist das zentrale arbeitsmarktpolitische Förderinstrument der Europäischen Union. Er leistet einen Beitrag zur Entwicklung und Beschäftigung durch Förderung der Beschäftigungsfähigkeit, des Unternehmergeistes, der Anpassungsfähigkeit sowie der Chancengleichheit und der Investition in Humanressourcen.

Vorbemerkungen

Um die Erarbeitung von Studienmaterialien im Weiterbildungsstudienprogramm „Lehramt berufsbildende Schulen und Zweitfächer“ durch die Dozenten zu unterstützen, wurden Beispielentwürfe mit empfehlenden Charakter erstellt. Nachfolgend werden Auszüge aus einem Beispieldokument für ein Studienmodul im Fachgebiet Mathematik vorgestellt. Das vorliegende Dokument gilt als Ergänzung für das im Rahmen von NOW erstellte Dokument „Didaktische Hinweise zur Erstellung von Lehrtexten“. (Stand: 01/2014)

Inhalt

1. Einführung	5
2. Auszüge aus dem Vorspann	7
2.1 Das Titelblatt	7
2.2 Das Inhaltsverzeichnis	8
2.3 Vorbemerkungen zur Einordnung des Lehrtextes in den Gesamtlehrgang	8
2.4 Studienanweisungen	9
2.5 Hinweise für den Umgang mit dem Lehrtext	9
3. Auszüge aus der Lerneinheit	10
3.1 Einführung in eine Lerneinheit	10
3.2 Darstellung und Vermittlung des Lerninhalts.....	10
3.3 Zusammenfassung und Wiederholung des Stoffes	11
3.4 Anwendungs- und Übungsaufgaben	11
3.5 Selbstkontrollaufgaben und Lösungen	11
4. Auszüge aus dem Anhang.....	12
4.1 Literaturverzeichnis.....	12
4.2 Abkürzungs- und Symbolverzeichnis.....	12
Literaturverzeichnis.....	13

1. Einführung

Ein Lehrtext sollte grundsätzlich drei Teile aufweisen (BIBB, 1991, S. 68ff.):

1. den Vorspann
2. die einzelnen Lerneinheiten und
3. den Anhang.

1. Der Vorspann enthält:

- das Titelblatt mit Lehrgangsbezeichnung und bibliografischen Angaben (vgl. Anhang 1)
- die Vorbemerkungen zur Einordnung des Lehrtextes in den Gesamtlehrgang und Studienanweisungen
- Hinweise für den Umgang mit dem Lehrtext
- sowie die Gliederung und das Inhaltsverzeichnis mit Seitenangaben

2. Die einzelnen Lerneinheiten

- Sie sollten innerhalb von zwei Stunden durchzuarbeiten sein.

3. Der Anhang enthält eventuell

- das Fremd- und Sachwortverzeichnis
- Abkürzungs- oder Symbolverzeichnis

Grundsätzlich sollte eine Lerneinheit folgende Strukturelemente enthalten:

I. Der Einstieg und die Einführung in das Thema

- einleitende sowie motivierende Ausführungen
- notwendige Studienanleitungen
- notwendige Wiederholungen

II. Die Darstellung und Vermittlung des Lerninhalts

- Input des Lernstoffs
- Denkanstöße
- Beispiele
- Veranschaulichungen

III. Zusammenfassung und Wiederholung des Stoffes

- Merksätze
- Ergänzungen

IV. Anwendungs- und Übungsaufgaben

V. Selbstkontrollaufgaben und Lösungen

Die vorgestellten Strukturelemente stellen Anregungen und Planungshilfen dar, wobei man diese jedoch je nach zu vermittelnden Lerninhalten anpassen muss. Bei kürzeren Lehrtexten können auch nur einzelne didaktische Elemente auftreten.

Beispielhafte Auszüge aus einem Lehrskript aus dem Bereich Mathematik werden im Folgenden bezüglich der einzelnen Teile eines Lehrskripts dargestellt.

2. Auszüge aus dem Vorspann

2.1 Das Titelblatt



Mathematik und ihre Didaktik

Dozent

Orientierungsphase

Vorlesung

Teilbarkeit, Primzahlen und Zahlenkongruenzen

für berufsbegleitende Studierende

Selbststudienmaterial

2.2 Das Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungs- bzw. Symbolverzeichnis	I
Vorwort	IV
Organisatorisches	IV
Hinweise für den Leser	V
Übersicht über den gesamten Lehrgang	VII
Literaturempfehlungen (Auswahl)	VIII
Paket 1	1
I Einführung	2
II Die Teilbarkeitsrelation	3

2.3 Vorbemerkungen zur Einordnung des Lehrtextes in den Gesamtlehrgang

Der gesamte Lehrgang gliedert sich in 4 Pakete:

1 Paket I. Einführung

 II. Die Teilbarkeitsrelation

2. Paket III. Primzahlen- Bausteine der natürlichen Zahlen

3. Paket IV. Euklidischer Algorithmus und diophantische Gleichungen

4. Paket V. Kettenbrüche

 VI. Zahlenkongruenzen

Die Zahlentheorie beschäftigt sich mit den Teilbarkeitseigenschaften der ganzen Zahlen, wobei ein besonderes Interesse den Primzahlen zukommt. Man könnte vermuten, dass es sich um ein sehr elementares Gebiet der Mathematik handelt, was aber nicht der Wahrheit entspricht, da sich um die ganzen Zahlen ihre Geheimnisse entreißen zu können, sich einige bedeutsame Zweige der Mathematik entwickelt haben, welche sich fernab von den Problemen der Teilbarkeitslehre als interessant und nützlich erweisen. Viele große Mathematiker haben Beiträge zur Entwicklung der Zahlentheorie geleistet und werden in diesem Lehrskript ebenfalls thematisiert.

2.4 Studienanweisungen

Vorwort

Lieber Teilnehmer der Veranstaltung,

im Nachfolgenden finden Sie die Selbststudienmaterialien zur Veranstaltung „Teilbarkeit, Primzahlen und Zahlenkongruenzen“. Dieses Skript enthält den gesamten Lernstoff Ihrer Veranstaltung und bildet damit die inhaltliche Grundlage Ihres Selbststudiums.

Wir hoffen, dass Ihnen dieser Lehrbrief einen guten Einblick in die Grundlagen der Zahlentheorie gewährt, und freuen uns auf ein spannendes Semester mit Ihnen.

Viel Erfolg!

Organisatorische Hinweise

In der Gestaltung des Seminars wechseln sich Selbststudien- und Präsenzphasen ab. Ihr Dozent vereinbart mit Ihnen zu Beginn der Veranstaltung die weiteren Präsenzphasen und die bis dahin zu absolvierenden Arbeitspakete. An den Präsenzterminen erfolgen eine Vertiefung der Inhalte und eine Verknüpfung mit Anwendungskontexten. In den Selbststudienphasen beschäftigen Sie sich selbstständig mit den Inhalten des Lehrskripts. Es wird empfohlen, wenn es sich anbietet, Arbeitsgruppen zu bilden beziehungsweise sich in den Diskussionsforen auszutauschen. Über die Prüfungsmodalitäten informiert Sie ihr Dozent der Veranstaltung.

2.5 Hinweise für den Umgang mit dem Lehrtext

Auszüge aus den Hinweisen für den Leser(1)

Bevor eine Übersicht darüber erfolgt, was Sie in diesem Lehrbrief erwarten wird, einige Worte dazu, wie man mit einem mathematischen Text arbeitet.

Einen mathematischen Text darf man nicht lesen wie einen Roman, man muss ihn sich erarbeiten. Wir möchten Ihnen hier einige Hilfestellungen zur besseren Bewältigung an die Hand geben.

1. Eine wichtige Regel im Umgang mit mathematischen Texten ist, das langsame Lesen (Wort für Wort und Symbol für Symbol). Der mathematische Sprachstil ist im Allgemeinen minimalistisch. Es gibt in einem mathematischen Text wenig Unnötiges, wodurch ein genaues Verständnis sehr wichtig ist. Ein gutes und wichtiges Hilfsmittel die Lesegeschwindigkeit zu drosseln, ist Papier und Schreibzeug. Wenn Sie einen Beweis durcharbeiten oder eine Definition oder die Aussage eines Satzes verstehen wollen, schreiben Sie mit.

Auszüge aus den Hinweisen für den Leser(2)

Jedes Arbeitspaket des vorliegenden Selbststudienmaterials ist in zwei Teile geteilt:

1. In dem theoretischen Teil werden die fachlichen Grundlagen des Themengebiets mit zahlreichen Beispielen erläutert. Die Beispiele und Definitionen werden entsprechend gekennzeichnet.
2. Den zweiten Teil bilden Übungsserien am Ende jedes Arbeitspakets, in denen Sie die erworbenen Kenntnisse anwenden und festigen können. Umfangreiche und ausführliche Lösungen der insgesamt 12 Übungsserien finden Sie am Ende des Lehrbriefs.

Am Ende des Selbststudienmaterials finden Sie eine kommentierte Musterklausur, die zur Prüfungsvorbereitung genutzt werden kann.

3. Auszüge aus der Lerneinheit

3.1 Einführung in eine Lerneinheit

Man kann versuchen, die Attraktivität eines Forschungsgebietes daran zu messen, über wie viele offene Probleme es verfügt. Ein Wissensbereich, in dem alle Fragen beantwortet sind, bietet wenige Herausforderungen. Ein Wissenschaftszweig ohne ungelöste Probleme wirkt ein Stück weit gestorben. Die Frage bezüglich der Zahlentheorie ist hierbei: Lebt sie noch oder sind ihre großen Probleme überwiegend gelöst? Hierbei lässt sich feststellen, dass die Zahlentheorie zahlreiche ungelöste Probleme bereithält.

Zwei ungelöste Probleme der Zahlentheorie sind:

3.2 Darstellung und Vermittlung des Lerninhalts

Bei Teilbarkeitsaussagen geht es immer um ein Paar von Aussagen. Es ist beispielsweise nicht sinnvoll „6 ist Teiler“ zu sagen, aber „6 ist Teiler von 114“ ist sehr wohl eine sinnvolle Aussage. Die Reihenfolge spielt hierbei eine wesentliche Rolle, „6 ist Teiler von 114“ stellt eine wahre Aussage dar, wohingegen „114 ist, ein Teiler von 6“ falsch ist.

Definition: Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Man sagt „ a ist ein Teiler von b “. Man schreibt $a \mid b$, falls es ein $q \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$q \cdot a = b.$$

3.3 Zusammenfassung und Wiederholung des Stoffes

Zusammenfassung und Bezug zu Zahlenkongruenzen: Caesarverschiebung

z. B. um drei Stellen: a, b, c, ... \rightarrow D, E, F, ...

Beachte: Klar- und Geheimtextbuchstaben

werden dem gleichen Alphabet entnommen.



Darstellbar durch gegeneinander verdrehbare Buchstabenscheiben oder gegeneinander verschiebbare Buchstabenleisten. Der Schlüssel ist hier die Anzahl der Stellen, um die ein Buchstabe verschoben wird.

Der Algorithmus ist das allgemeine Verfahren. Nummeriere die 26 Buchstaben des Alphabets von 1 bis 26 (oder auch von 0 bis 25). Eine Verschiebung entspricht der Restklassenaddition modulo 26 (Rest bei Division durch 26). Bei Nummerierung von 1 bis 26 muss die 0 mit z identifiziert werden.

Analog: **Multiplikative Chiffrierung**. Aber: Der Faktor f muss teilerfremd zu 26 (der Alphabetmächtigkeit) sein, d. h. $\text{ggT}(f, 26) = 1$, also $f \in \{3; 5; 7; 9; 11; 15; 17; 19; 21; 23; 25\}$.

3.4 Anwendungs- und Übungsaufgaben

Aufgabe 1

- Beweisen Sie die Teilbarkeitsregeln (1), (2), (4), (5) und (6) für *natürliche* Zahlen.
- Begründen Sie, warum Teilbarkeitsregel (2) für ganze Zahlen *nicht* gilt.
- Formulieren Sie eine für ganze Zahlen gültige Modifikation von Teilbarkeitsregel (2).

Teilbarkeitsregeln in \mathbb{N}

- $1 \mid b$ und $b \mid b$
- $(a \mid b \wedge b \mid a) \Rightarrow a = b$
- $(a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c$
- $a \mid b \Rightarrow a \mid r \cdot b$ falls $r \in \mathbb{N}$
- $(a \mid b \wedge a \mid c) \Rightarrow a \mid b + c$
- $(a \mid b \wedge a \mid b + c) \Rightarrow a \mid c$

3.5 Selbstkontrollaufgaben und Lösungen

Zu Aufgabe 1

Zu zeigen: a ist Quadratzahl \Leftrightarrow alle Exponenten in der Primfaktorzerlegung sind gerade.

„ \Rightarrow “: Sei a eine Quadratzahl. Dann existiert eine natürliche Zahl b , so dass $b^2 = a$. b besitzt eine Primfaktorzerlegung $b = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}$. Es folgt

$$b^2 = (p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r})^2 = p_1^{2n_1} \cdot p_2^{2n_2} \cdot \dots \cdot p_r^{2n_r}. \text{ Alle Exponenten sind gerade.}$$

„ \Leftarrow “: Es gelte $a = p_1^{2m_1} \cdot p_2^{2m_2} \cdot \dots \cdot p_s^{2m_s}$. Dann ist auch $a = (p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_s^{m_s})^2$. Mit $b := p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_s^{m_s}$ gilt $a = b^2$, also ist a Quadratzahl.

4. Auszüge aus dem Anhang

4.1 Literaturverzeichnis

Padberg, F.: Elementare Zahlentheorie. Spektrum: Heidelberg, 2008.

Reiss, K.; Schmieder, G.: Basiswissen Zahlentheorie. Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 2005.

4.2 Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Abkürzungen	Bedeutung	Beispiel
\Rightarrow	daraus folgt	n ist durch 4 teilbar \Rightarrow n ist durch 2 teilbar
\approx	ungefähr gleich	$\frac{1}{3} \approx 0.33$
$<$	kleiner als	$B < 5$ B ist kleiner als 5
$>$	größer als	$B > 2$ B ist größer als 2
\leq	kleiner gleich	$-x^2 \leq 0$ für jede reelle Zahl x

Literaturverzeichnis

Bundesinstitut für Berufsbildung Berlin (1991): Leitfaden für die Entwicklung von Lehrgängen und Lehrtexten. Didaktische Hilfen für pädagogisch Tätige in Schule, Betrieb und beruflicher Erwachsenenbildung. 2. Aufl., Berlin: Beuth.