**Staatswissenschaftliche Fakultät - Universität Erfurt**

# Kompaktskript
# Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Fabian Kleine

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Grundlagen

## 1.1 Die gebräuchlichsten Zahlenbegriffe

- Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ , $\mathbb{N}_0$
- Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ , Erweiterung der natürlichen Zahlen um die negativen ganzen Zahlen
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ , Division zweier ganzer Zahlen
- Irrationale Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , (lies: die Menge der reellen Zahlen abzüglich der Menge der rationalen Zahlen)
  unendliche, nichtperiodische Dezimalzahlen, nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellbar, entweder algebraisch (z.B. $\sqrt{2}$ ) oder transzendent
  (z.B. $\pi$ und die Eulersche Zahl $e$ )
- Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ , rationale und irrationale Zahlen
- Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ , Erweiterung der reellen Zahlen um den Imaginärteil $i$ , mit $i=\sqrt{-1}$

## 1.2 Indizierung von Variablen

1.2.1 Einfachindizierung

Oft werden Variablen mit einem Index versehen. Dies ermöglicht die eindeutige Zuordnung von Daten.

Beispiel:

$$\{a_i | i \in I\} \qquad I=\{j, \dots, n\} \qquad I \in \mathbb{N}$$

$$\begin{matrix} j=1 \\ n=10 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \{a_i | i \in I\} = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$$

Die Variable $a_i$ kann hier also 10 verschiedene Werte annehmen.

1.2.2 Doppelindizierung

Insbesondere in Datenmatrizen und Doppelsummen werden die Elemente mit einer *Doppelindizierung* versehen.

Beispiel:

$$\{a_{ij} | i \in I, j \in J\} \qquad I, J \in \mathbb{N}$$

$$I = \{1, \ldots, 3\} \qquad \Rightarrow \qquad a_{ij} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix}$$
$$J = \{1, \ldots, 3\}$$

Analog sind *Mehrfachindizierungen* $a_{ijk}$ zu verstehen.

## 1.3 Summen- und Produktzeichen

### 1.3.1 Summenzeichen

Das Summenzeichen $\sum$ steht als Wiederholungszeichen für die fortgesetzte Addition:

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n := \sum_{i=m}^{n} a_i, \qquad n \geq m, n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Dabei ist:
- $i$ der Summationsindex
- $m$ die untere Summationsgrenze
- $n$ die obere Summationsgrenze
- $a_i$ das allgemeine Summenglied

Rechenregeln für Summen:

$$\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n-mal} = n \cdot a$$

$$\sum_{j=k}^{n} c \cdot a_j = ca_k + ca_{k+1} + \ldots + ca_n = c \cdot (a_k + \ldots + a_n) = c \cdot \sum_{j=k}^{n} a_j$$

$$\sum_{j=k}^{n} (a_j + b_j) = \sum_{j=k}^{n} a_j + \sum_{j=k}^{n} b_j$$

$$\sum_{j=k}^{n} a_j = \sum_{j=k}^{p} a_j + \sum_{p+1}^{n} a_j \qquad k \leq p < n$$

Doppelsummen:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{o} a_{ij} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1o} + a_{21} + \ldots a_{2o} + \ldots + a_{nl} + \ldots + a_{no}$$

1.3.2 Produktzeichen

Das Produktzeichen steht als Wiederholungszeichen für die fortgesetzte Multiplikation:

$$a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdots a_{n-1} \cdot a_n := \prod_{i=k}^{n} a_i , \qquad n \geq k , \quad k , n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Dabei ist:
- $i$ der Multiplikationsindex
- $k$ die untere Multiplikationsgrenze
- $n$ die ober Multiplikationsgrenze
- $a_i$ das allgemeine Glied

Rechenregeln für Produkte:

$$\prod_{i=1}^{n} c a_i = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)$$

für $a_i = b_i$ gilt also $\prod_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^2$

## 1.4 Elementare Rechenoperationen

1.4.1 Multiplikation und Binomische Formeln

Fakultät:

Fakultät schreibt man als Produkt folgendermaßen

$n! = \prod_{i=1}^{n} i$ und steht für das Produkt der ersten $n$ natürlichen Zahlen.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Binomische Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\mathrm{ab} + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2\mathrm{ab} + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

1.4.2 Division und Brüche

Ein Bruch ist der Quotient $\frac{a}{b}$ ,mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ ; $a$ heißt Zähler, $b$ Nenner.

Erweitern und Kürzen eines Bruches:

$\frac{a \cdot f}{b \cdot f} = \frac{a}{b}$ , mit $a, b \in \mathbb{Z}, f \in \mathbb{R}, b, f \neq 0$ und $\frac{a:q}{b:q} = \frac{\frac{a}{q}}{\frac{b}{q}} = \frac{a}{b}$ , mit

$a, b \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{R}, b, q \neq 0$

!!! Nicht in Differenzen und Summen kürzen!!!

Multiplikation und Division von Brüchen:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ und $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Addition von Brüchen:

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ bzw. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$ , mit $b \cdot d$ als Hauptnenner

**1.5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen**

1.5.1 Potenzen

Das $n$-fache Produkt einer Zahl mit sich selbst ergibt die $n$ -te Potenz dieser Zahl:

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n-mal} = a^n$ , mit $a$ als Basis und $n$ als Exponenten

Wichtige Idenditäten:

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ und $x^0 = 1$ .

Potenzgesetze:

Für eine beliebige Basis $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt:

$x^p y^p = (xy)^p$ $\qquad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$ $\qquad (x^p)^q = x^{p \cdot q}$

$\frac{x^p}{y^p} = (\frac{x}{y})^p$ $\qquad x^p x^q = x^{p+q}$

1.5.2 Wurzeln

$\sqrt[n]{x}=x^{1/n}, x\geq 0, n\in\mathbb{N}$ , mit $x$ als Radikant und $n$ als Wurzelexponenten.

Für $x\in\mathbb{R}^{+}, n\in\mathbb{N}$ und $m\in\mathbb{Z}$ gilt: $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ .

Wurzelgesetze:

Für beliebige $x, y>0, n, m\in\mathbb{N}$ und $p, q\in\mathbb{Q}$ gilt:

$$\sqrt[n]{x^p}\cdot\sqrt[m]{x^q}=x^{\frac{pm+qn}{mn}}=\sqrt[nm]{x^{pm+qn}}$$
$$\sqrt[n]{x^p}\div\sqrt[m]{x^q}=\sqrt[nm]{x^{pm-qn}}$$
$$\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{x^p}\right)^q}=\sqrt[nm]{x^{pq}}$$
$$\sqrt[n]{x^p}\cdot\sqrt[n]{y^p}=\sqrt[n]{(xy)^p}$$
$$\frac{\sqrt[n]{x^p}}{\sqrt[n]{y^p}}=\sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)^p}$$

1.5.3 Logarithmen

Ist $a^y=x\left(a\in\mathbb{R}^{+}\backslash\{1\}; x\in\mathbb{R}^{+}; y\in\mathbb{R}\right)$ , so heißt $y=\log_a(x)$ Logarithmus von $x$ zur Basis $a$ .

Anmerkungen:

1. Logarithmus ist ein Synonym für Exponent.
2. Der Potenzwert $x$ in $a^y=x$ heißt auch Numerus.
3. Der Numerus muss stets positiv sein, denn es gibt zu einer positiven Basis $a$ keine Hochzahl, so dass die entstehende Potenz Null oder negativ wird.

Alternative Definition:

Der Logarithmus von $x$ zur Basis $a$ ist derjenige (eindeutig bestimmte) Exponent $y$ , mit dem man $a$ potenzieren muss, um $x$ zu erhalten.

Häufig verwendete Logarithmen:

Dekadischer Logarithmus, $a=10$ : $\log_{10}x\equiv\log x$

Natürlicher Logarithmus, $a=e\approx 2.7182...$ : $\log_e x\equiv\ln x$

Logarithmengesetze:

Für jede beliebige Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und die stets positiven Numeri $x$ und $y$ gilt:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x \quad (r \in \mathbb{R})$$

$$\log_a(1/x) = -\log_a x$$
$$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \log_a x^{1/n} = 1/n \log_a x$$

Speziell gilt:

$$\log 10^x = x$$
$$\ln e^x = x$$

## 1.6 Elementare Kombinatorik

### 1.6.1 Permutationen und Fakultät

Jede mögliche Anordnung von $n$ verschiedenen Elementen, in der alle Elemente verwendet werden, heißt *Permutation* $P_n$ dieser Elemente.

Die Anzahl der Permutationen ergibt sich aus:

$P_n = n!$ sprich: n-Fakultät

### 1.6.2 Variation

Jede mögliche Anordnung (mit Berücksichtigung der Reihenfolge) aus je $k$ von $n$ Elementen heißt *Variation* $V_n^k$ dieser Elemente.

Fall 1: ohne Wiederholung (ohne Zurücklegen)

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Fall 2: mit Wiederholung (mit Zurücklegen)

$$V_n^k = n^k$$

### 1.6.3 Kombination

Jede mögliche Anordnung (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) aus je $k$ von $n$ Elementen heißt *Kombination* $C_n^k$ dieser Elemente.

Fall 1: ohne Wiederholung (ohne Zurücklegen)

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$ sprich: n über k (*Binomialkoeffizient*)

Fall 2: mit Wiederholung (mit Zurücklegen)

$$C_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

## 1.7 Grundzüge der Mengenlehre

### 1.7.1 Begriff der Menge

Eine Menge ist ein Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens. Die Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Ist ein Objekt $a$ Element der Menge $A$, so schreibt man $a \in A$.

Ist ein Objekt $b$ nicht Element der Menge $A$, so schreibt man $b \notin A$.

Objekte einer Menge beschreibt man durch Aufzählung der Elemente in geschweiften Klammern $\{\}$ oder durch Beschreibung der erforderlichen Eigenschaften $M = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$.

### 1.7.2 Weitere Definitionen

- *Grundmenge* $\Omega$: Alle Elemente für eine bestimmte Betrachtungsweise.
- *Leere Menge* $\{\}$ : (auch $\emptyset$) enthält keine Elemente.
- die *Mächtigkeit* ist die Anzahl $n(A)$ der Elemente einer Menge.
- *Gleichheit von Mengen*: Zwei Mengen sind einander gleich ( $A = B$ ) wenn jedes Element aus $A$ auch Element von $B$ und zugleich jedes Element von $B$ auch Element von $A$ ist.
- *Teilmenge*: Ist jedes Element von $A$ auch ein Element von $B$, so ist $A$ eine Teilmenge von $B$ ( $A \subset B$ ). Für alle Mengen gilt: $\{\} \subset A$, $A \subset A$.
- *Komplementärmenge*: $\bar{M} = \{x \mid x \notin M \wedge x \in \Omega\}$ ist Komplement zu $M \subset \Omega$. Es gilt: $\bar{\bar{M}} = M$, $\bar{\emptyset} = \Omega$, $\bar{\Omega} = \emptyset$.
- *Potenzmenge*: Die Menge aller Teilmengen von $A$ heißt Potenzmenge von $A$: $P(A) = \{x \mid x \subset A\}$. Die Mächtigkeit der Potenzmenge einer endlichen Menge $A$ (mit $n(A) = m$ ): $n(P(A)) = 2^m$.

• *Zerlegung einer Menge*: Eine Menge $Z$ von nicht leeren Teilmengen von $A$ ( $Z_i \in Z$ , $i=1,2...,n$ mit $Z_i \subset A$ ) heißt Zerlegung von $A$ , wenn jedes $a \in A$ in genau einer Teilmenge $Z_i$ liegt.

### 1.7.3 Mengenoperationen

• *Durchschnitt* (Schnittmenge): $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ Menge aller Elemente die sowohl in $A$ als auch in $B$ enthalten sind.

Ist der Durchschnitt zweier Mengen $A$ und $B$ leer ( $A \cap B = \emptyset$ ), so heißen $A$ und $B$ *disjunkt* (elementfremd).

• *Vereinigung*: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ Menge aller Elemente, die in $A$ oder in $B$ oder in beiden enthalten sind.

•*Differenz von Mengen*: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ Menge aller Elemente von $A$ , die nicht in $B$ enthalten sind.

### 1.7.4 Produkte von Mengen:

n-Tupel:

Es sei $n$ eine natürliche Zahl und $a_{1,...}, a_n$ seien, nicht notwendig verschiedene Elemente gewisser Mengen. Die Darstellung $(a_{1,...}, a_n)$ heißt ein aus diesen Elementen gebildetes *n-Tupel* und $a_i$ , $i=1,...,n$ seine i-te Koordinate.

Für $n=2$ spricht man von einem geordnetem Paar, für $n=3$ von einem Tripel, für $n=4$ von einem Quadrupel etc.

Kartesisches Produkt:

Das kartesische Produkt $(A \times B)$ zweier Mengen $A$ , $B$ ist die Menge aller geordneten Paare $(a, b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$ :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Für das kartesische Produkt gilt das Kommutativgesetz nicht: $A \times B \neq B \times A$ .

# 2 Grundlagen der linearen Algebra

## 2.1 Vektoren

Elemente des kartesischen Produktes $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ nennt man Vektoren:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ist Spaltenvektor.}$$

Analog ist $\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein Zeilenvektor. Hierbei bezeichnet $\boldsymbol{x}'$ oder $\boldsymbol{x}^T$ die *Transponierte* von $\boldsymbol{x}$. Beim Transponieren werden also Zeilen und Spalten des Vektors vertauscht.

Zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ sind gleich $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ wenn alle Komponenten gleich sind $(x_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, n)$ .

<u>Vektoroperationen</u>

Multiplikation eines Skalars $c \in \mathbb{R}$ mit einem Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$c \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \\ \vdots \\ c \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Summe zweier n-dimensionaler Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ :

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

## 2.2 Matrizen

Logische Erweiterung des mathematischen Objektes Vektor: Reiht man Spaltenvektoren gleicher Dimension nebeneinander (oder Zeilenvektoren gleicher Dimension untereinander) an, so ergibt sich eine Matrix der Dimension $n \times m$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)^T$$

Axiomatische Definition der Matrix als eigenständiges mathematisches Objekt:

Die Zusammenfassung von $n \times m$ reellen Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $i=1, \ldots, n$ und $j=1, \ldots, m$ zu einem rechteckigen $(n \cdot m)$ -Tupel nennt man Matrix $\boldsymbol{A}_{(n \times m)}$ . Sie besitzt $n$ Zeilen und $m$ Spalten. Ihre Dimesinon ist deshalb $n \times m$ .

Vektoren sind daher spezielle Matrizen mit Dimension $(1 \times m)$ oder $(n \times 1)$ .

### 2.2.1 Ordnungsrelationen für Matrizen

Da ein $n$ -dimensionaler Vektor definitionsgemäß eine $(n \times 1)$ -Matrix ist, müssen die für Vektoren definierten Ordnungsrelationen analog auch für Matrizen gelten:

Zwischen den beiden $(n \times m)$ -Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} &\Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \text{für alle} \quad i=1, \ldots, n \quad \text{und} \quad j=1, \ldots, m \quad ; \\ \boldsymbol{A} > \boldsymbol{B} &\Leftrightarrow a_{ij} > b_{ij} \quad \text{für alle} \quad i=1, \ldots, n \quad \text{und} \quad j=1, \ldots, m \quad ; \\ \boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{B} &\Leftrightarrow a_{ij} \geq b_{ij} \quad \text{für alle} \quad i=1, \ldots, n \quad \text{und} \quad j=1, \ldots, m \quad . \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt natürlich für die Operatoren $<$ und $\leq$ .

Analog zu positiven und negativen Zahlen spricht man von

- positiven Matrizen, wenn alle Komponenten echt größer Null sind, und von
- negativen Matrizen, wenn alle Komponenten echt kleiner Null sind.

### 2.2.2 Matrizenoperationen

#### Multiplikation mit einem Skalar

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ wird mit einem Skalar $k$ multipliziert, indem alle Komponenten mit $k$ multipliziert werden:

$$\boldsymbol{C} = k \cdot \boldsymbol{A} \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = k \cdot a_{ij} \quad \text{für alle} \quad i=1, \ldots, n \quad \text{und} \quad j=1, \ldots, m \quad .$$

#### Addition (Subtraktion) von Matrizen

Zwei $(n \times m)$ -Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ werden addiert (bzw. subtrahiert), indem die entsprechenden Komponenten $a_{ij}$ und $b_{ij}$ addiert (bzw. subtrahiert) werden:

$C = A \pm B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$ .

Voraussetzung für die Addition (bzw. Subtraktion) ist dieselbe Dimension beider Matrizen!

Rechenregeln:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \quad \text{(Kommutativgesetz)}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \quad \text{(Assoziativgesetz)}$$

$$k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k\,\boldsymbol{A} + k\,\boldsymbol{B} \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

Matrixmultiplikation

Das innere Produkt von zwei $(n \times 1)$ Vektoren $\boldsymbol{x}$ , $\boldsymbol{y}$ :

$$\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \boldsymbol{y}' \boldsymbol{x} \quad .$$

Das Ergebnis ist ein Skalar, welches als eindimensionaler Vektor interpretiert werden kann.

Die Matrixmultiplikation ist durch die Multiplikation von Vektoren gegeben. Das erste Element der ersten Zeile von $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ ergibt sich aus dem inneren Produkt der ersten Zeile von $\boldsymbol{A}$ und der ersten Spalte von $\boldsymbol{B}$ :

$$c_{11} = \sum_{i=1}^{m} a_{1i} \cdot b_{i1} \quad \text{bzw. allgemein:} \quad c_{kl} = \sum_{i=1}^{m} a_{ki} \cdot b_{il}$$

Multiplikation $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von $\boldsymbol{A}$ der Anzahl der Zeilen von $\boldsymbol{B}$ entspricht (Konformität).

Regeln zur Matrixmultiplikation (Konformität vorausgesetzt):

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}) \quad \text{(Assoziativgesetz)}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C} \quad \text{(Distributivgesetze)}$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}$$

Das Kommutativgesetz gilt für Matrixmultiplikation nicht. Im allgemeinen sind die Produkte $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ unterschiedlich (falls sie überhaupt in beide Richtungen durchführbar sind).

Sprechweise:

- Multiplikation der Matrix $\boldsymbol{A}$ mit $\boldsymbol{B}$ von *rechts*: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ *(Postmultiplikation)*
- Multiplikation der Matrix $\boldsymbol{A}$ mit $\boldsymbol{B}$ von *links*: $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ *(Prämultiplikation)*

Potenz einer Matrix

Für eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ bestimmt man die nichtnegative, ganzzahlige Potenz wie folgt:

$$\boldsymbol{A}^n = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{A}}_{\text{n-mal}} \quad \text{mit} \quad n > 0 \quad .$$

Speziell gilt für $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$ .

Für die Matrixpotenzen gelten die üblichen Rechenregeln für Potenzen reeller Zahlen.

Division von Matrizen

In der allgemeinen Form $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}$ nicht definiert!

In Analogie zur Division zweier reeller Zahlen $a$ und $b$ $(b \neq 0)$ :
$a/b = a \cdot b^{-1}$ möglich.

Transponieren einer Matrix

Bei Vektoren: Spaltenvektor $\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{x}'$ Zeilenvektor.

Verallgemeinerung auf Matrizen: Spalten von $\boldsymbol{A}$ werden zu Zeilen von $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^T$ :

$$\underset{(n \times m)}{\boldsymbol{A}} \Rightarrow \underset{(m \times n)}{\boldsymbol{A}'} \quad .$$

Regeln zum Transponieren von Matrizen:

$$(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$$

$$\underset{(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{C}} = \underset{(n \times m)(m \times k)}{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})'} = \underset{(k \times m)(m \times n)}{\boldsymbol{B}' \ \boldsymbol{A}'}$$

2.2.3 Besondere Matrizen

Quadratische Matrizen

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt quadratisch von der Ordnung $n$ , wenn ihre Zeilenzahl gleich ihrer Spaltenzahl ist, d.h. ihre Dimension gleich $(n \times n)$ ist.

Null-Matrix

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Die Nullmatrix spielt bei der Addition dieselbe Rolle wie die Zahl Null bei der Addition von Zahlen. D.h. es gilt: $\boldsymbol{A}+\mathbf{0}=\boldsymbol{A}$ . Jede mit der Null-Matrix multiplizierte Matrix wird ebenfalls zur Nullmatrix.

Einheitsmatrix

Quadratische Matrizen deren Hauptdiagonale nur aus Einsen besteht und alle anderen Elemente gleich Null sind:

$$\underset{(n\times n)}{\boldsymbol{E}}{}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von $\boldsymbol{E}$ : $\underset{(n\times m)}{\boldsymbol{A}}\cdot\underset{(m\times m)}{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{A}=\underset{(n\times n)}{\boldsymbol{E}}\cdot\underset{(n\times m)}{\boldsymbol{A}}$ ,

Einheitsmatrizen spielen in der linearen Algebra eine vergleichbare Rolle wie die Zahl 1 in der (skalaren) Algebra.

Symmetrische Matrizen

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt symmetrisch wenn sie quadratisch ist und es gilt $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$ und daher $a_{ij}=a_{ji}$ .

Für eine beliebige Matrix $\boldsymbol{B}$ gilt $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ sind stets symmetrisch.

Diagonalmatrizen

Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{D}$ der Ordnung $n$ , deren Komponenten außerhalb der Hauptdiagonalen gleich Null sind nennt man Diagonalmatrix:

$$\underset{(n\times n)}{\boldsymbol{D}_n}=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} .$$

**Die Inverse einer Matrix**

Die Inverse eine quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \quad .$$

- Für die Existenz der Inversen einer Matrix ist es eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung, dass die Matrix $\boldsymbol{A}$ quadratisch ist.
- Besitz $\boldsymbol{A}$ eine Inverse heißt $\boldsymbol{A}$ *regulär*, anderenfalls *singulär*.

Eigenschaften für reguläre Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ :

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$(\boldsymbol{A}')^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})'$$

## 2.3 Lineare Gleichungssysteme

Ein System von $n$ Gleichungen mit $m$ Variablen $x_1, x_{2,} \ldots , x_m$ der Form

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{array}$$

heißt *lineares Gleichungssystem* (LGS).

Sind alle Koeffizienten $b_i$ mit $i = 1, \ldots, n$ gleich Null, so nennt man das System *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Das LGS kann kompakt wie folgt in Matrizenform geschrieben werden:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Dabei ist $\boldsymbol{A}$ die (gegebene) $(n \times m)$ -Koeffizientenmatrix:

$$\underset{(n \times m)}{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad ;$$

$\boldsymbol{x}$ der (gesuchte) $m$ -dimensionale Vektor der Unbekannten (Variablen):

$$\underset{(m \times 1)}{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad ;$$

und $\boldsymbol{b}$ der (bekannte) $n$ -dimensionale Vektor der „rechten Seite”:

$$\underset{(n\times 1)}{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad .$$

Der Begriff der Lösung eines LGS:

Jeder Vektor $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_{1,} \bar{x}_{2,} \dots, \bar{x}_m)'$ , für den $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ gilt, heißt Lösung des LGS. D.h. setzt man für den (unbekannten ) Vektor $\boldsymbol{x}$ den konkreten Lösungsvektor $\bar{\boldsymbol{x}}$ ein, so müssen alle Gleichungen als Identität (linke Seite = rechte Seite) erfüllt sein.

Die Gesamtheit aller Lösungen eines LGS wird als **Lösungsmenge** $L = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ bezeichnet. Die Lösung kann leer sein (d.h. es gibt keine Lösungen), genau ein Element besitzen (d.h. es existiert eine eindeutige Lösung) oder aus unendlich vielen Elementen bestehen.

Ein inhomogenes LGS besitzt genau dann eine eindeutige Lösung wenn es $n = m$ gilt, also wenn es genauso viele Gleichungen wie unbekannte Variablen gibt und alle $n$ Gleichungen von einander linear unabhängig sein, das heißt es dürfen keine redundanten Informationen vorkommen.

Die Lösung kann unter anderen mittels der *Cramerschen Regel*, der *Matrixinversion* oder dem *Gaußschen Algorithmus* ermittelt werden.

Gaußscher Algorithmus (Alternative Bezeichnung: *Gaußsche Elimination*.)

Universell einsetzbarer Algorithmus.

Vorgehensweise:

Ausgangspunkt ist die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ . Anwendung elementarer Zeilenoperationen (Vertauschen zweier Zeilen; Ersetzen einer Zeile durch die Summe dieser Zeile und einer weiteren Zeile; Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl) mit dem Ziel, den oberen quadratischen Teil von $\boldsymbol{A}$ auf eine Einheitsmatrix zu reduzieren.

Anmerkungen:

- Das Verfahren ist für beliebige $(n \times m)$ LGS'e anwendbar.
- Kommt es während der Durchführung des Algorithmus' zu Widersprüchen, so besitzt das LGS keine Lösung.

# 3 Funktionen

Definition: *Abbildung* oder *Funktion*:

Seien $X, Y$ Mengen. Eine Vorschrift $f$ , die jedem $x \in X$ genau ein zuordnet, heißt Abbildung oder Funktion von der Menge $X$ in die Menge $Y$ . Wir schreiben:

$f: X \to Y$ oder elementweise $x \in X \to f(x) = y \in Y$

Die Menge aller Werte, die für $x$ zugelassen werden, heißt *Definitionsbereich* $D(f)$ der Funktion. Die Menge der Werte, die $y = f(x)$ annimmt, heißt *Wertebereich* $W(f)$ der Funktion.

## 3.1 Eigenschaften von Funktionen

Definition: *Gleichheit von zwei Funktionen*

Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ heißen gleich, wenn $D(f) = D(g)$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D$ .

Definition: *Beschränktheit von Funktionen*

Sei $f(x)$ eine Funktion in ihrem Definitionsbereich $D(f)$ . Dann heißt $f$ nach *oben beschränkt*, falls es eine reelle Zahl $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in D(f)$ gilt: $f(x) \leq k$ ; analog heißt $f$ nach *unten beschränkt* falls es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) \geq k$ für alle $x \in D(f)$ .
Eine Funktion $f$ heißt *beschränkt*, wenn $f$ sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Definition: *Monotonie*

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to R$ eine Funktion. Dann heißt $f(x)$

- *streng monoton steigend*, falls für alle $x_{1,} x_2 \in I$ gilt:

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ;

- *streng monoton fallend*, falls für alle $x_{1,} x_2 \in I$ gilt:

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ;

- *monoton steigend*, falls für alle $x_{1,} x_2 \in I$ gilt:

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ;

- *monoton fallend*, falls für alle $x_{1,} x_2 \in I$ gilt:

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ .

Definition: *Umkehrfunktionen*

Eine Funktion $y=f(x)$ mit $x\in D(f)$ , $y\in W(f)$ heißt eineindeutig, wenn es zu jedem $y$ genau einen Wert $x$ gibt.

Zur eineindeutigen Funktion $y=f(x)$ existiert eine *Umkehrfunktion* oder *inverse Funktion* $x=g(y)=f^{-1}(y)$ .

Es gilt:

$$D(f^{-1})=W(f) \quad \text{und} \quad W(f^{-1})=D(f) \quad .$$

Satz: Sei $f$ eine streng monotone Funktion in $D(f)$ . Dann existiert zu $f$ die Umkehrfunktion $f^{-1}$ mit $D(f^{-1})=W(f)$ .

## 3.2 Konvexität

Definition: *konvexe Punktmengen*

Eine Punktmenge $K$ wird als konvex bezeichnet, wenn mit zwei Punkten $x_{1,}x_2\in K$ alle Punkte der Verbindungsstrecke zwischen diesen Punkten in der Menge $K$ enthalten sind.

D.h. es muss für alle möglichen Punkte $x_{1,}x_2\in K$ gelten:

$$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in K \quad \text{für alle} \quad \lambda\in[0,1]$$

Definition: *konvexe und konkave Funktionen*

Sei $I\in D(f)$ ein Intervall und $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f$

a) *konvex*, falls für alle $x_{1,}x_2\in I$ mit $x_1<x_2$ gilt:

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \quad \text{für alle} \quad \lambda\in[0;1] \quad ;$$

b) *konkav*, falls für alle $x_{1,}x_2\in I$ mit $x_1<x_2$ gilt:

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \quad \text{für alle} \quad \lambda\in[0;1] \quad .$$

Eine Funktion $f$ heißt *streng* konvex (konkav), wenn stets das Ungleichheitszeichen gültig ist.

### 3.3 Stetigkeit von Funktionen

Definition: *Stetigkeit von Funktionen*

$y = f(x)$ heißt stetig an der Stelle $a \in D(f)$ genau dann, wenn gilt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad .$$

Ist eine Funktion $f: D(f) \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig, so wird die Funktion *stetig* genannt.

Eine Funktion $y = f(x)$ , die im Punkt $x = a$ nicht stetig ist, heißt dort *unstetig*.

Satz: (*Eigenschaften stetiger Funktionen*)

Die Funktion $f$ sei im abgeschlossenen Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

- $f$ ist in $[a, b]$ beschränkt;
- $f$ nimmt in $[a, b]$ ihr Maximum $(f_{max})$ und ihr Minimum $(f_{min})$ an;
- jeder zwischen $f_{max}$ und $f_{min}$ liegende Wert wird von $f$ (mindestens) einmal als Funktionswert angenommen.

### 3.4 Besondere Stellen von Funktionen

Definition: *Nullstellen einer Funktion*

Sei $y = f(x)$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D(f)$ . Der Argumentwert $x_0 \in D(f)$ heißt Nullstelle der Funktion $f$ wenn gilt: $f(x_0) = 0$ .

Die Bestimmung der Nullstellen einer Funktion $y = f(x)$ geschieht dadurch, dass man $f(x) = 0$ setzt und die sich dafür ergebende Gleichung nach $x$ auflöst. Graphisch entsprechen die Nullstellen einer Funktion ihren Schnittpunkten mit der Abszisse.

Ein direktes Auflösen der Gleichung $f(x) = 0$ ist nur in wenigen Fällen möglich! Ausweg: Nullstellenbestimmung mit Hilfe eines *Näherungsverfahrens (*z.B. *Newtonverfahren*). Diese sind allerdings nicht Bestandteil dieser Vorlesung.

Definition: *Extrema*

Eine Funktion $y=f(x)$ besitzt an einem Punkt $x_0 \in D(f)$ ein lokales oder relatives Maximum, wenn für alle Punkte $x$ des Intervalls $I \in D(f)$, in dem auch $x_0$ liegt gilt:

$$f(x_0) > f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I \setminus \{x_0\} \quad .$$

Entsprechend gilt für ein lokales oder relatives Minimum:

$$f(x_0) < f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I \setminus \{x_0\} \quad .$$

**3.5 Funktionen mit mehreren Variablen**

Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen ist eine Abbildung von $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ .

Bisher: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ .
Graph: Tupel $(x, y)$ beschreibt Linien im $\mathbb{R}^2$ .

Erste Erweiterung: $z = f(x; y)$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ .
Graph: Tripel $(x; y; z)$ beschreibt Flächen im $\mathbb{R}^3$ .

Allgemein: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ .
Graph: $(n+1)$ -Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ beschreibt Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Funktionen mit mehreren Variablen nennt man auch oft *multivariate Funktionen*. Funktionen die nur von einer Variablen abhängen werden dann *univariate Funktionen* genannt.

Konvexität und Stetigkeit sind analog zu den univariten Funktionen definiert.

# 4 Differentialrechnung

## 4.1 Differenzenquotient und Differentialquotient

Differenzenquotient:

Der *Differenzenquotient* drückt die Änderungstendenz einer linearen Funktion aus. Bei linearen Funktionen sind Differenzenquotient und erste Ableitung identisch.

Betrachten Sie die allgemeine lineare Funktion:

$$f(x)=y=n+mx \quad .$$

Der Anstieg $m$ der Funktion ist gegeben durch:

$$m=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))}{\Delta x} \quad \text{mit} \quad \Delta x=x_1-x_0 \quad .$$

Definition: *Differentialquotient; erste Ableitung*

Gegeben sei eine Funktion $y=f(x)$ mit dem Definitionsbereich $D(f)$. Existiert für einen Wert $x_0 \in D(f)$ der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

so heißt dieser Grenzwert *Differentialquotient* oder *erste Ableitung* der Funktion $f$ an der Stelle $x_0$. Er gibt die Steigung der Funktion an der Stelle $f(x_0)$ an.

Schreibweisen:

$$f'(x_0) \;;\quad y'(x_0) \;;\quad y'|_{x=x_0} \;;\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \;;\quad \left.\frac{d\,f(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \;;$$

$$\left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x=x_0}$$

## 4.2 Die Ableitungsfunktion

Definition: *Ableitungsfunktion*

Existiert zu einer Funktion $y=f(x)$ in jedem Punkt $x$ eines Intervalls $I$ (mit $I \in D(f)$ ) die (erste) Ableitung $f'(x)$, so heißt $f$ (in $I$ ) *differenzierbar*. Die Funktion $f'$, die jedem $x \in I$ die zugehörige (erste) Ableitung $f'(x)$ von $f$ zuordnet, heißt *abgeleitete Funktion* von $f$ oder *Ableitungsfunktion* von $f$ .

### 4.3 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Die Beziehung zwischen den wichtigen Eigenschaften der Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion regelt der folgende

<u>Satz:</u> *Stetigkeit und Differenzierbarkeit*

Ist eine Funktion $f$ im Punkt $x_0$ differenzierbar, so ist sie dort auch stetig. Die Umkehrung gilt nicht.
Aber es gilt: Ist $f$ in $x_0$ *nicht* stetig, so ist sie auch *nicht* differenzierbar.

Stetigkeit der Funktion $f$ ist somit eine *notwendige* aber keine *hinreichende* Bedingung für die Differenzierbarkeit.

<u>Satz:</u>

Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in I$ , falls die rechts- und linksseitige Ableitungen von $f$ an der Stelle $x_0$ existieren und übereinstimmen, d.h. falls gilt: $f'_r(x_0) = f'_l(x_0)$ .

### 4.4 Die Ableitung elementarer Funktionen

1. Die Ableitung der *konstanten Funktion* $f(x) = c \, (c \in \mathbb{R}, c = \text{konst.})$

   - Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist überall differenzierbar und es gilt: $f'(x) = 0$ .

2. Die Ableitung der *Potenzfunktion* $f(x) = x^n \, (n \in \mathbb{N})$

   - Die Potenzfunktion ist überall differenzierbar und es gilt: $f'(x) = n\, x^{n-1}$ .

3. Verallgemeinerung: *Potenzfunktion* $f(x) = x^m \, (m \in \mathbb{Z})$ und $f(x) = x^r \, (r \in \mathbb{R})$

   - Die Potenzfunktion $f(x) = x^m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist überall differenzierbar und es gilt: $f'(x) = m\, x^{m-1}$ .

   - Die Potenzfunktion $f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^+$ ist überall differenzierbar und es gilt: $f'(x) = r\, x^{r-1}$ .

### 4.5 Ableitungsregeln

1. *Konstanter Faktor*: $y = c \cdot f(x)$ $c = \text{const.}$

   $y' = c \cdot f'(x)$

2. *Summenregel*: $y=f(x)\pm g(x)$

$$y'=f'(x)\pm g'(x)$$

3. *Produktregel*: $y=f(x)\cdot g(x)$

$$y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

4. *Quotientenregel*: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad g(x)\neq 0$

$$y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

5. *Kettenregel*: $y=f(g(x))$ mit $y=f(z)$ als äußere Funktion $z=g(x)$ als innere Funktion

$$y'=f'(z)\cdot g'(x)$$

Verallgemeinerung der Kettenregel: $y=f(g(h(x)))$ mit $y=f(z)$ , $z=g(u)$ und $u=h(x)$

$$y'=f'(z)\cdot g'(u)\cdot h'(x)$$

6. *Ableitung der Umkehrfunktion*: Besitzt eine in $D$ differenzierbare Funktion $y=f(x)$ eine Umkehrfunktion $x=f^{-1}(y)$ , so ist $x=f^{-1}(y)$ differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d\,f^{-1}(x)}{d\,y}=\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad .$$

7. *Ableitung einer logarithmischen Funktion*: $y=\ln g(x)$ mit $g(x)>0$

$$y'=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

8. *Ableitung einer allgemeinen natürlichen Exponetialfunktion*: $y=e^{g(x)}$

$$y'=g'(x)\cdot e^{g(x)}$$

9. *Ableitung einer Exponentialfunktion zur allgemeinen Basis* $a$ : $y=a^x$ , für $a>0$

$$y'=a^x\ln a$$

Verallgemeinerung: $y=a^{g(x)}$

$$y'=a^{g(x)}g'(x)\ln a \qquad \text{für} \quad a\in\mathbb{R}^+$$

## 4.6 Höhere Ableitungen

Definition: *Zweite Ableitung*
Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y=f(x)$ . Ist ihre erste Ableitung $y'=f'(x)$ ihrerseits differenzierbar, dann heißt $f$ zweimal differenzierbar und die erste Ableitung von $f'(x)$ heißt *zweite Ableitung* der Funktion $y=f(x)$ . Diese Ableitung wird bezeichnet mit

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 f(x)}{d x^2} \quad \text{oder} \quad y'' \quad \text{oder} \quad f''(x) \quad .$$

Definition: $n$ *-te Ableitung*
Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y=f(x)$ . Ist diese $n$ -fach differenzierbar, so kann die $n$ -te Ableitung von $f$ als (erste) Ableitung der $(n-1)$ -ten Ableitung von $f$ gebildet werden. Diese Ableitungen werden allgemein bezeichnet mit

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{oder} \quad \frac{d^n f(x)}{d x^n} \quad \text{oder} \quad y^{(n)} \quad \text{oder} \quad f^{(n)}(x) \quad .$$

## 4.7 Partielle Ableitungen

Definition: *partielle Ableitung*
Die Ableitung der Funktion $f(x, y_0)$ , $y_0=$ konst. An der Stelle $x_0$ ist gegeben durch

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_{0,} y_0)}{\Delta x} \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Bigg|_{x_{0,} y_0} = f'_x(x_{0,} y_0)$$

und wird als partielle Ableitung erster Ordnung von $f(x, y)$ nach $x$ an der Stelle $(x_{0,} y_0)$ bezeichnet.
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ heißt *partieller Differentialquotient*.

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_{0,} y_0+\Delta y)-f(x_{0,} y_0)}{\Delta y} \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Bigg|_{x_{0,} y_0} = f'_y(x_{0,} y_0)$$

und wird entsprechend als partielle Ableitung erster Ordnung von $f(x, y)$ nach $y$ an der Stelle $(x_{0,} y_0)$ bezeichnet.

Definition: *partielle Ableitung erster Ordnung*
Gegeben sei die Funktion $z=f(x, y)$ . Existieren für alle Punkte $(x, y)\in D(f)$ die Grenzwerte:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x} \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

und

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad ,$$

so heißt die Funktion *partiell differenzierbar* nach $x$ und $y$. Die partiellen Differentialquotienten nennt man auch die *partiellen Ableitungen erster Ordnung*. Man schreibt für die partielle Ableitung nach $x$:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad \text{oder} \quad f'_x(x, y) \quad \text{; und nach } y \text{ :}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad \text{oder} \quad f'_y(x, y) \quad .$$

<u>Definition:</u> *partielle Ableitung erster Ordnung – Verallgemeinerung*

Gegeben sei die Funktion $y = f(x_{1,} \ldots, x_n)$. Die erste Ableitung von $f$ nach einem beliebigen $x_i (i=1, \ldots, n)$ mit $x_j =$ konstant für alle $j \neq i$ heißt partielle Ableitung der Funktion $f$ nach $x_i$ und wird mit

$$\frac{\partial f(y)}{\partial x_i} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_{1,} \ldots, x_n) \quad \text{oder} \quad f'_{x_i}(x_{1,} \ldots, x_n)$$

bezeichnet.

### 4.8 Höhere partielle Ableitungen

<u>Definition:</u> *partielle Ableitung zweiter Ordnung*

Gegeben sei eine Funktion mit $n$ unabhängigen Variablen $y = f(x_{1,} \ldots, x_n)$ und mit den $n$ partiellen Ableitungen erster Ordnung $\partial y / \partial x_i$ , $i = 1, \ldots, n$. Leitet man diese wiederum partiell nach den Variablen $x_j$ , $j = 1, \ldots, n$ ab, so erhält man $n^2$ *partielle Ableitungen zweiter Ordnung* der Funktion $f$.
Folgende Schreibweisen werden verwendet:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{oder} \quad f'_{x_i x_j}(x_{1,} \ldots, x_n) \quad .$$

Wird zweimal nach derselben Variable differenziert, schreibt man anstelle von:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_i} \quad \text{meist:} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} \quad .$$

<u>Hessematrix:</u>

Die Zusammenfassung der $n^2$ partiellen Ableitungen zweiter Ordnung einer Funktion $y = f(x_{1,} \ldots, x_n)$ nennt man *Hesse Matrix* $\boldsymbol{H}$ :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} .$$

Es gilt:

$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$ (*Youngs Theorem*), daher ist die Hesse Matrix stets symmetrisch. Die Hesse Matrix hat die Dimension $(n \times n)$ . Auf ihrer Hauptdiagonalen befinden sich die so genannten *direkten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung*.

### 4.9 Elastizitäten

Definition: *Bogenelastizität*

Gegeben sei die stetige Funktion $y = f(x)$ , ändert man an der Stelle $(x, f(x))$ die unabhängige Variable $x$ um $\Delta x$ so gilt für die dazu korrespondierende Änderung des Funktionswertes $\Delta f : \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Das Verhältnis der relativen Änderungen $\Delta f / f$ und $\Delta x / x$ nennt man Bogenelastizität von $f$ bezüglich $x$

$$\varepsilon_B(f, x) = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} .$$

Die Bogenelastizität gibt an, um wieviel % sich $f$ durchschnittlich ändert, wenn die unabhängige Variable um 1% geändert wird.

Definition: *Punktelastizität*

Gegeben sei die stetige Funktion $y = f(x)$ . Dann nennt man das Verhältnis der relativen Änderungen $df / f$ und $dx / x$ Punktelastizität von $f$ bezüglich $x$

$$\varepsilon(f, x) = \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} .$$

Der Zahlenwert zur Punktelastizität wird analog zur Bogenelastizität interpretiert.

Interpretation der Elastizitäten

| Wert der Elastizität | Attribut der Funktion |
|---|---|
| $\varepsilon=0$ | vollkommen unelastisch |
| $-1<\varepsilon<0$ bzw. $0<\varepsilon<1$ | unelastisch |
| $-\infty<\varepsilon<-1$ bzw. $1<\varepsilon<\infty$ | elastisch |
| $\varepsilon=\pm\infty$ | vollkommen elastisch |

## 4.10 Polynomiale Approximationen

Um das Arbeiten mit einer komplizierten Funktion zu vermeiden, kann man versuchen, diese Funktion durch eine einfache Funktion zu approximieren. Die einfachste Form der Approximation ist die *linerare Approximation*.

Es gilt für univariate Funktionen:

Die lineare Approximation an $f$ um $x=x_0$ ist

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad \text{(für } x \text{ in der Nähe von } x_0 \text{).}$$

Berücksichtigt man weitere Ableitungen, kann man eine n-mal Funktion auch genauer als Polynom n-ten Grades Approximieren. Dazu verwendet man die so genannte *Taylor Approximation*.

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

## 4.11 Differentiale und das totale Differential

Das Differential einer Funktion:

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y=f(x)$ und ihre erste Ableitung $y'=f'(x)$ . $dx$ sei eine endliche Änderung der unabhängigen Variablen. $dy=df(x)=f'(x)dx$ heißt (zu $dx$ gehöriges) *Differential der Funktion*. $dx$ heißt auch Differential der unabhängigen Variablen.

Beachten Sie, dass $dx$ hier keine infinitisimal kleine Änderung von $x$ ist, sondern eine beliebige Änderung.

Es gilt:

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ ist ungefähr gleich $dy=f'(x)dx$ , wenn die Änderung $dx$ sehr klein ist.

Das Differential $dy$ der Funktion $y=f(x)$ gibt eine nährungsweise Änderung des Funktionswertes an, wenn $x$ um das Differential der unabhängigen Variablen $dx$ verändert wird, hierbei wird die Funktion $f(x)$ mit der Tangente der Funktion an der Stelle $x$ approximiert.

Für Differentiale gelten die üblichen Differentiationsregeln.

Das totale Differential:

Überträgt man die Überlegungen zur Differentialen univariater Funktionen auf multivariate Funktionen gelangt man zu dem Begriff des *partiellen Differentials*.

Gegeben sei eine Funktion $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mir den partiellen Ableitungen erster Ordnung $\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\partial x_1$, $\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\partial x_2$, ... , $\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\partial x_n$ . Dann heißt

$$dy_{x_i}=\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \, dx_i \quad \textit{partielles Differential bezüglich} \quad x_i \;, \quad \forall i=1,\ldots,n \;.$$

Die partiellen Differentiale $dy_{x_i}$ einer multivariaten Funktion geben somit die näherungsweise Änderung der Funktion $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ an, wenn man eine Variable $x_i$ um $dx_i$ variiert.

Variiert man gleichzeitig mehrere Variablen, so gibt die Summe der partiellen Differentiale (das *totale Differential*) die näherungsweise Änderung der Funktion $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ an:

$$dy=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \, dx_i \;.$$

**4.12 Implizites Differenzieren**

Univariate Funktionen

Sei $g(x, y)$ eine Gleichung, welche nicht explizit nach $y$ umgestellt ist. Dennoch lässt sich solch eine Gleichung theoretisch (wenn auch praktisch manchmal nur schwer) nach $y$ umstellen und so in der Form $y=f(x)$ darstellen. Verzichtet man auf die explizite Dartstellung, so muss man die Funktion *implizit* differenzieren. Hierbe fasst man $y$ als unbekannte Funktion von $x$ auf, so dass die Gleichung $g(x, y)$ folgendermaßen formuliert wird:

$$g(x, f(x)) \qquad (*)$$

Die implizite Ableitung erhält man durch beidseitiges differenzieren von (*) nach $x$ und umstellen nach $f'(x)$ .

Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen:

Gegeben sei eine Funktion von zwei Variablen. Betrachten Sie die Gleichung:

$$F(x, y)=c \qquad (\; c \text{ ist eine Konstante})$$

Diese Gleichung stellt eine so genannte Höhenlinie dar (auch Isoquante in der Produktionstheorie oder Indifferenzkurve in der Nutzentheorie). Sie definiert nun in einem bestimmten Intervall $I$ eine implizite Funktion $y=f(x)$ von $x$, so dass gilt:

$$F(x, f(x))=c \qquad \text{für alle } x \text{ in } I \ .$$

Jetzt kann man die Steigung der Höhenlinie bestimmen:

$$F(x,y)=c \quad \Rightarrow \quad y'= -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} \qquad \text{mit } \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\neq 0$$

<u>Verallgemeinerung für Funktionen mit mehr als zwei abhängigen Variablen:</u>

Betrachten Sie die Funktion $F(x,y,z)=c$, wobei $c$ eine beliebige Konstante ist. Diese Gleichung bestimmt eine Fläche im dreidimensionalen Raum. Es wird angenommen, dass $z=f(x,y)$ implizit eine Funktion definiert, die für alle $(x,y)$ in einem Definitionsbereich $A$ die Gleichung $F(x,y,z)=c$ erfüllt. Dann gilt:

$$F(x,y,f(x,y))=c \qquad \text{für alle } (x,y) \text{ in } A \ .$$

Dies impliziert die folgende Beziehung für die partiellen Ableitungen von $z=f(x,y)$:

$$F(x,y,z)=c \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}= -\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}} \ ,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}= -\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}} \ .$$

Allgemein gilt:

$$F(x_{1,}\dots,x_n,z)=c \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x_i}= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \ , \qquad \forall i=1,\dots,n \ .$$

# 5 Optimierung

## 5.1 Kurvendiskussion

5.1.1 Monotonie

Satz: *Monotonie differenzierbarer Funktionen*

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y=f(x)$. Gilt für alle $x \in I \subset D(f)$ :

a) $f'(x) \geq 0$, so ist $f$ im Intervall $I$ *monoton steigend*;
b) $f'(x) \leq 0$, so ist $f$ im Intervall $I$ *monoton fallend*.

Gilt $f'(x)=0$ nur für höchstens abzählbar viele $x \in I$, so ist $f$ *streng monoton steigend* bzw. *fallend*.

5.1.2 Krümmungsverhalten

Satz: *Krümmungsverhalten differenzierbarer Funktionen*

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y=f(x)$. Gilt für alle $y=f(x)$ :

a) $f''(x)>0$, so ist $f$ im Intervall $I$ *konvex*;
b) $f''(x)<0$, so ist $f$ im Intervall $I$ *konkav*.

5.1.3 Extremwerte

Satz: *notwendige Bedingung für einen Extremwert*

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y=f(x)$. Notwendige Bedingung für einen Extremwert der Funktion an einer Stelle $x_0 \in D(f)$ ist das Verschwinden der ersten Ableitung:

$$f'(x_0)=0 \quad .$$

Satz: *hinreichende Bedingung für einen Extremwert*

Die zweimal differenzierbare Funktion $y=f(x)$ besitze an der Stelle $x_0 \in D(f)$ einen stationären Punkt (d.h. es gelte: $f'(x_0)=0$ ). Hinreichende Bedingung für einen Extremwert in $x_0$ ist, dass $f''(x) \neq 0$ gilt. Insbesondere besitzt $f$ an der Stelle $x_0$

a) ein *relatives Maximum*, wenn $f''(x_0)<0$ gilt und
b) ein *relatives Minimum*, wenn $f''(x_0)>0$ gilt.

5.1.4 Wendepunkte

Definition: *Wendepunkt*

Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$. Eine Stelle $x \in D(f)$ heißt *Wendepunkt*, wenn die Funktion links von $x$ eine andere Krümmung besitzt als rechts von $x$.
Satz: *Wendepunkte einer zweimal differenzierbaren Funktion*

Die Wendepunkte einer zweimal differenzierbaren Funktion $y = f(x)$ sind genau die relativen Extrema der ersten Ableitung $f'(x)$ von $f$. Es gilt insbesondere:

a) In einem konvex/konkav - Wendepunkt ist $f'$ maximal;
b) In einem konkav/konvex - Wendepunkt ist $f'$ minimal.

### 5.2 Optimierung von Funktionen einer Variablen

Die Funktion $y = f(x)$ ( $x \in D(f)$ ) soll eine differenzierbare Funktion für alle $x \in D(f)$ sein. Liegt ein Extremwert $x_0$ im Inneren von $D(f)$ so stellt sich das unbeschränkte Optimierungsproblem wie folgt dar:

| $\max\limits_x f(x)$ | $\min\limits_x f(x)$ |
|---|---|
| Bedingung 1. Ordnung für einen Extremwert: | |
| $f'(x_0) = 0$ | |
| Bedingung 2. Ordnung für einen Extremwert: | |
| $f''(x_0) < 0$ | $f''(x_0) > 0$ |

### 5.3 Optimierung von Funktionen mit mehreren Variablen

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Vektor unabhängiger Variablen und $f(\boldsymbol{x})$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Optimierungsproblem:

$$\max_{\boldsymbol{x}} \quad \text{bzw.} \quad \left[\min_{\boldsymbol{x}}\right] \qquad z = f(\boldsymbol{x}) .$$

Bedingung 1. Ordnung:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \overset{!}{=} 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \overset{!}{=} 0$$

Bedingung 2. Ordnung:

Allgemein gilt:

Die Hesse Matrix $\boldsymbol{H}^{\mathbf{0}}$ an der Stelle $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ ist

- *positiv definit* für ein lokales Minimum;
- *negativ definit* für ein lokales Maximum.

Definitheitsprüfung erfolgt über die Untersuchung der *Determinante* von $\boldsymbol{H}$ .

Dies ist nicht Bestandteil dieser Vorlesung. Daher Beschränkung auf den Fall von zwei unabhängigen Variablen.

Für 2 Variablen gilt:

Ein *lokales Maximum* liegt vor, wenn:

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_1^2} < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 > 0 \quad .$$

Ein *lokales Minimum* liegt vor, wenn:

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_1^2} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 > 0 \quad .$$

Ein *Sattelpunkt* liegt vor, wenn:

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 < 0 \quad .$$

### 5.4 Monotone Transformation bei Extremwerten

Sei $f(\boldsymbol{x})$ mit $\boldsymbol{x} = (x_{1,} \ldots, x_n)$ definiert in einem Intervall $I \subseteq \mathrm{IR}^n$ und sei $F$ eine Funktion, definiert auf dem Wertebereich von $f$ . Die Funktion $g$ sei in $I$ definiert durch:

$$g(\boldsymbol{x}) = F(f(\boldsymbol{x}))$$

Dann gilt:

Wenn $F$ monoton wachsend ist und $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ die Funktion $f$ in $I$ maximiert (minimiert), dann maximiert (minimiert) $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ auch die Funktion $g$ in $I$ .

Die Optimierung einer monotonen Transformation einer Funktion $f$ ist also äquivalent zur Optimierung von $f$ .

### 5.5 Optimalwertfunktion

Motivation: Hat man bei einem beschränkten oder unbeschränkten Optimierungsproblem einen Optimalwert gefunden, so interessiert regelmäßig die Frage, wie sich dieser Optimalwert ändert, wenn sich wichtige Parameter des Optimierungsproblems ändern. Diese Frage wird im Rahmen einer komparativ-statischen Analyse diskutiert und führt zum Begriff der *Optimalwertfunktion*.

Der univariate Fall:

Eine Funktion $f$ hängt von einer Variablen $x$ sowie einem Parameter $r$ ab. Die Funktion $f(x,r)$ soll bezüglich $x$ optimiert werden:

$$\max(\min)_x f(x,r) \qquad \Rightarrow \qquad x^*(r) \quad .$$

Setzen wir den optimalen Wert $x^*(r)$ in die Funktion $f(x,r)$ ein, erhalten wir die so genannte *Optimalwertfunktion*: $f^*(r)=f(x^*(r),r)$ .

### 5.6 Multivariate Optimierung unter Nebenbedingungen

Beschränkung auf den Fall von Funktionen zweier Variablen und Nebenbedingungen in Gleichungsform.

Optimierungsproblem:

$$\max_{x,y} \left[\min_{x,y}\right] \quad z=f(x,y) \quad \text{s.t.} \quad g(x,y)=c$$

*Lagrange*-Verfahren:

Aus der Zielfunktion $z=f(x,y)$ und der Nebenbedingung $g(x,y)-c=0$ bildet man mit einem Multiplikator $\lambda$ (neuer Parameter) die Lagrangefunktion $L$ :

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda[g(x,y)-c]$$

und untersucht diese auf Extrema *ohne* Nebenbedingungen.

Bedingungen 1. Ordnung:

(1) $$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\stackrel{!}{=}0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

(2) $$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\stackrel{!}{=}0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

(3) $$g(x,y)=c$$

Dies ist leicht auf Funktionen, die von $n$ Variablen abhängen zu übertragen. Auch mehrere Nebenbedingungen in Gleichungsform sind analog zu behandeln.

<u>Die Interpretation des Lagrange-Multiplikators</u>

Betrachten Sie das Maximierungsproblem mit einer Nebenbedingung:

$$\max\ (\min)\quad f(\boldsymbol{x}) \qquad \text{s.t.} \qquad g(\boldsymbol{x})=b \quad .$$

Die Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von $b$ ergibt sich zu:

$$f^{*}(b)=f(\boldsymbol{x}^{*}(b)) \quad .$$

Die Änderung der Optimalwertfunktion bezüglich einer Änderung in $b$ ist:

$$\frac{df^{*}(b)}{db}=\lambda(b)$$

Dies zeigt, dass der Lagrangemultiplikator die Änderungsrate der Optimalwertfunktion ist, wenn sich die Konstante in der Nebenbedingung ändert.

Man bezeichnet $\lambda$ auch als Schattenpreis.

## Literaturvereichnis

Jung, Robert (2006): Mathematik I und II für Wirtschaftswissenschaftler; Skripte zur Vorlesung an der Universität Tübingen.

Linde, Rainer: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler – Mathematik II, Skript zur Vorlesung an der Universität Jena.

Ohse, Dietrich (2000): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II – Lineare Wirtschaftsalgebra, 4. Auflage, Verlag Franz Vahlen München.

Schwarze, Jochen (2000): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler – Band 3: Lineare Algebra, Lineare Optimierung und Graphentheorie, 11. Auflage, Verlag Neue Wirtschafts-Briefe Herne/ Berlin.

Schwarze, Jochen (2005): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler , Bd. 2, 12. Auflage , NWB Verlag Neue Wirtschaftsbriefe, Herne /Berlin.)

Sydsaeter, Knut und Peter Hammond (2006): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler-Basiswissen mit Praxisbezug, 2. Auflage, Pearson Studium München.

Sydsaeter, Knut, Peter Hammond, Atle Seierstad und Arne StrØm (2005): Further Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall Finacial Times London.